

باسمه تعالی

سری دوم تمرین‌های درس جبر خطی (تحویل: سه‌شنبه ۹۵/۱۱/۲۶)

۱- نشان دهید که دترمینان ماتریس واندرمان (Vandermonde) یعنی ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

برابر است با:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

۲- نشان دهید مجموعه‌ی $A = \{0, 1, 2\}$ با تعریف جمع و ضرب (اعمال اول و دوم) در پیمانه‌ی 3 تشکیل یک میدان می‌دهد. در مورد

مجموعه‌ی $A = \{0, 1, 2, 3\}$ با تعریف جمع و ضرب (اعمال اول و دوم) در پیمانه‌ی 4 چه نظری دارید؟

۳- الف) مجموعه‌ی $A = \{\alpha, \beta\}$ را در نظر گرفته و دو عمل اول و دوم را به گونه‌ای برای عناصر آن تعریف کنید که این مجموعه با اعمال تعریف شده تشکیل یک میدان دهد.

ب) اکنون مجموعه‌ی V را در نظر بگیرید که عناصر آن ماتریس‌های 2×2 هستند. درایه‌های این ماتریس‌ها از مجموعه‌ی A گرفته شده است. عمل جمع هر دو ماتریس از V و ضرب یک اسکالر (منظور از اسکالر، عضوی از A می‌باشد) در عضوی از V را به گونه‌ای تعریف کنید که (V, A) تشکیل یک فضای برداری دهد.

پ) دترمینان ماتریس $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$ را تعیین کنید. وارون این ماتریس را در صورت وجود به دست آورید.

ت) با در نظر گرفتن مجموعه‌ی $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ و مجموعه‌ی V که عناصر آن ماتریس‌های 3×3 بوده و درایه‌های این ماتریس‌ها از مجموعه‌ی A گرفته شده است، بندهای الف و ب را تکرار کنید.

۴- A یک ماتریس $n \times n$ مشخص و معلوم می‌باشد. در این صورت اگر V مجموعه‌ی کلیه‌ی ماتریس‌های B به ابعاد $n \times n$ باشد که برای آن‌ها:

$$AB = BA$$

نشان دهید که V با تعریف جمع متعارف ماتریس‌ها و ضرب متعارف اسکالر در ماتریس، روی میدان اعداد حقیقی یک فضای برداری است.

۵- نشان دهید که عناصر همانی مربوط به اعمال جمع و ضرب در یک میدان و بردار θ در یک فضای برداری، یکتا هستند.

۶- نشان دهید که اشتراک دو زیرفضای انتزاع شده از یک فضای برداری، یک زیرفضا از فضای برداری مطرح شده می‌باشد. آیا در مورد اجتماع دو زیرفضا نیز این مطلب برقرار می‌باشد؟